"Cái gốc" của một số hằng đẳng thức và bất đẳng thức trong chương trình Toán Trung học cơ sở

TS. Trịnh Đào Chiến
Trường Cao Đẳng Sư Phạm Gia Lai

Hằng đẳng thức (đồng nhất thức) và bất đẳng thức là những khái niệm quan trọng trong chương trình Toán Trung học cơ sở. Bài viết đề cập đến những "cái gốc" của một số hằng đẳng thức và bất đẳng thức. Từ đó giới thiệu một số phương pháp sáng tác bài tập từ những "cái gốc" này.

1 "Cái gốc" thứ nhất: Hằng đẳng thức Lagrange tổng quát (dạng 1)

Với n bộ số thực (a_1, b_1, u_1, v_1), (a_2, b_2, u_2, v_2),..., (a_n, b_n, u_n, v_n), ta có

Định lý 1.1.

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)\\ &= -\sum_{1\le i<j\le n}^{n} (a_i v_j - a_j v_i)(b_i u_j - b_j u_i).\end{aligned} \tag{1}$$

Hằng đẳng thức trên được gọi là Hằng đẳng thức Lagrange tổng quát (dạng 1).

1.1 Trường hợp $n = 2$ và $n = 3$

- Với $n = 2$, thì (1) có dạng

$$\begin{aligned}&(a_1u_1 + a_2u_2)(b_1v_1 + b_2v_2) - (a_1b_1 + a_2b_2)(u_1v_1 + u_2v_2)\\ &= -(a_1v_2 - a_2v_1)(b_1u_2 - b_2u_1).\end{aligned} \tag{2}$$

- Với $n = 3$, thì (1) có dạng

$$\begin{aligned}&(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\\ &= -(a_1v_2 - a_2v_1)(b_1u_2 - b_2u_1) - (a_1v_3 - a_3v_1)(b_1u_3 - b_3u_1)\\ &\quad - (a_2v_3 - a_3v_2)(b_2u_3 - b_3u_2).\end{aligned} \tag{3}$$

1.2 Trường hợp $u_i = a_i$ và $v_i = b_i$

- Với $u_i = a_i$ và $v_i = b_i$, thì (1) có dạng

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \tag{4}$$

(4) chính là Hằng đẳng thức Lagrange.

- Với $n = 2$, thì (4) có dạng

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2. \tag{5}$$

- Với $n = 3$, thì (4) có dạng

$$\begin{gathered}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \\ = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 + \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right)^2 + \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2.\end{gathered} \tag{6}$$

Trong (6), cho $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, ta được hằng đẳng thức

$$3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 + \left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(a_1 - a_3\right)^2 + \left(a_2 - a_3\right)^2. \tag{7}$$

hoặc rút gọn, ta được hằng đẳng thức quen thuộc

$$\left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_2 a_3. \tag{8}$$

Trong (7), nếu $3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2$ thì

$$\left(a_1 - a_2\right)^2 = \left(a_1 - a_3\right)^2 = \left(a_2 - a_3\right)^2 = 0$$

hay $a_1 = a_2 = a_3$.

Ta có bài toán sau:

Bài toán 1.1. *Cho 3 số a_1, a_2, a_3 thỏa mãn $3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2$. Chứng minh rằng khi đó $a_1 = a_2 = a_3$.*

Trong (7), nếu thay a_1 bởi $a_1 - a_2$, a_2 bởi $a_2 - a_3$, a_3 bởi $a_3 - a_1$, thì $a_1 + a_2 + a_3$ được thay bởi $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) = 0$. Do đó, ta có hằng đẳng thức

$$\begin{gathered}3\left[\left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(a_2 - a_3\right)^2 + \left(a_3 - a_1\right)^2\right] \\ = \left(a_1 - 2a_2 + a_3\right)^2 + \left(a_2 - 2a_3 + a_1\right)^2 + \left(a_3 - 2a_1 + a_2\right)^2.\end{gathered}$$

Từ hằng đẳng thức trên, nếu cho

$$\begin{gathered}\left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(a_2 - a_3\right)^2 + \left(a_3 - a_1\right)^2 \\ = \left(a_1 - 2a_2 + a_3\right)^2 + \left(a_2 - 2a_3 + a_1\right)^2 + \left(a_3 - 2a_1 + a_2\right)^2.\end{gathered}$$

thì

$$3\left[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2\right]=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2$$

hay

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2=0.$$

Do đó $a_1=a_2=a_3$. Ta có bài toán sau:

Bài toán 1.2. *Chứng minh rằng từ đẳng thức*

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2=(a_1-2a_2+a_3)^2+(a_2-2a_3+a_1)^2+(a_3-2a_1+a_2)^2$$

suy ra $a_1=a_2=a_3$.

Trong (5), cho $b_1=b_2=1$, ta được hằng đẳng thức quen thuộc

$$(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2=2\left(a_1^2+a_2^2\right).$$

Từ hằng đẳng thức trên, tiếp tục thay a_1 bởi $a+b$ và a_2 bởi $c+d$, ta được

$$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2=2\left[(a+b)^2+(c+d)^2\right]$$

và thay a_1 bởi $a-b$ và a_2 bởi $c-d$, ta được

$$(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2=2\left[(a-b)^2+(c-d)^2\right].$$

Cộng 2 đẳng thức trên theo vế, ta có

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2\\&=2\left[(a+b)^2+(a-b)^2+(c+d)^2+(c-d)^2\right]\\&=2\left[2\left(a^2+b^2\right)+2\left(c^2+d^2\right)\right]=4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).\end{aligned}$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 1.3. *Chứng minh hằng đẳng thức*

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2\\&=4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).\end{aligned}$$

Từ (6), ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2. \qquad (9)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1b_3 = a_3b_1$, $a_2b_3 = a_3b_2$ hay $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ (nếu b_1, b_2, b_3 khác 0).

Từ (9), nếu cho $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$ và $b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 1$, ta có thể sáng tác bài toán sau

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng từ các đẳng thức $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$ và $b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 1$, suy ra rằng $-1 \leq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \leq 1$.*

Bây giờ, giả sử thêm rằng các số a_k, b_k đều là số dương và thỏa mãn

$$\alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta,\ k = 1, 2, 3,$$

với α và β là các số dương nào đó.

Thế thì, ta có $\left(\dfrac{a_k}{b_k} - \alpha\right)\left(\beta - \dfrac{a_k}{b_k}\right) \geq 0$, hay $(a_k - \alpha.b_k)(\beta.b_k - a_k) \geq 0$, hay $a_k^2 + \alpha\beta.b_k^2 \leq (\alpha+\beta).a_kb_k$, với $k = 1, 2, 3$.

Suy ra $(a_1^2+a_2^2+a_3^2) + \alpha\beta.(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \leq (\alpha+\beta).(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$.

Ngoài ra, theo Bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) + \alpha\beta.\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \geq 2.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{\alpha\beta.\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)}.$$

Do đó

$$2.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{\alpha\beta}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \leq (\alpha+\beta).(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

hay

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \leq \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}.(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3).$$

Từ đó, ta sáng tác được bài toán sau:

Bài toán 1.5. *Giả sử rằng các số a_k, b_k đều là số dương và thỏa mãn $\alpha \leq \dfrac{a_k}{b_k} \leq \beta$, $k = 1, 2, 3$, với α và β là các số dương nào đó. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \leq \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}.(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3).$$

Nhận xét: Bất đẳng thức trên, về cơ bản, khác hẳn Bất đẳng thức (9) quen thuộc thường gặp, ít nhất là về kỹ thuật chứng minh, vì dấu bất đẳng thức đã đổi chiều.

2 "Cái gốc" thứ hai: Hằng đẳng thức Lagrange tổng quát (dạng 2)

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ là $2n$ số thực và

$$M_m := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_k^m \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1-k} b_i^k \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{m+1-k} \right),$$

trong đó $C_k^m = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$, $m! = 1.2.3...m.$

Ta có kết quả sau

Định lý 2.1.

$$M_m = \begin{cases} \sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^{2r}, & khi \;\; m = 2r-1; \\ \sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^{2r} (a_i b_j + a_j b_i), & khi \;\; m = 2r. \end{cases} \tag{10}$$

Hằng đẳng thức trên cũng được xem là Hằng đẳng thức Lagrange tổng quát (dạng 2).

2.1 Trường hợp $m = 1$

Với $m = 1$ (ứng với $r = 1$), hằng đẳng thức (10) có dạng

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k C_k^1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-k} b_i^k \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{2-k} \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

hay

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \tag{11}$$

Hằng đẳng thức (11) chính là Hằng đẳng thức Lagrange.

2.2 Trường hợp $m = 2$

Với $m = 2$ (ứng với $r = 1$), hằng đẳng thức (10) có dạng

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{3-k} b_i^k \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{3-k} \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 (a_i b_j + a_j b_i).$$

Khai triển ta được

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 \right)$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2\right) = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 (a_i b_j + a_j b_i)$$

hay

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2\right) \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 (a_i b_j + a_j b_i). \end{aligned} \tag{12}$$

- Với $n = 2$ thì (12) có dạng

$$\left(a_1^3 + a_2^3\right)\left(b_1^3 + b_2^3\right) - \left(a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2\right)\left(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2\right)$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

- Với $n = 3$ thì (12) có dạng

$$\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right)\left(b_1^3 + b_2^3 + b_3^3\right) - \left(a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + a_3^2 b_3\right)\left(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2\right)$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 (a_1 b_3 + a_3 b_1)$$

$$+ (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 (a_2 b_3 + a_3 b_2).$$

2.3 Trường hợp $m = 3, 4, ...$

Tương tự như trên, ta có các hằng đẳng thức đối với các trường hợp còn lại, chẳng hạn

- Với $m = 3$ (ứng với $r = 2$), hằng đẳng thức (10) có dạng

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^3\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right)^2 \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^4. \end{aligned} \tag{13}$$

- Với $m = 4$ (ứng với $r = 2$), hằng đẳng thức (10) có dạng

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^5\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^5\right) - 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^4\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^3\right) \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^4 (a_i b_j + a_j b_i). \end{aligned} \tag{14}$$

Tương tự như các phương pháp ở phần 1, từ các hằng đẳng thức trên, ta có thể sáng tác được nhiều hằng đẳng thức và bất đẳng thức khác, vô cùng phong phú.

Hơn nữa, hệ quả sau đây sẽ chuyển các hằng đẳng thức trên thành các bất đẳng thức tương ứng

Hệ quả 2.1. *Nếu $m = 2r - 1$ (r nguyên dương) hoặc $a_i \ge 0$, $b_i \ge 0$, thì $M_m \ge 0$.*

Chẳng hạn:
- Bởi (11), ta có bất đẳng thức sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq 0 \tag{15}$$

- Bởi (12), với $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, ta có bất đẳng thức sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2\right) \geq 0. \tag{16}$$

- Bởi (13), ta có bất đẳng thức sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^3\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right)^2 \geq 0. \tag{17}$$

- Bởi (14), với $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, ta có bất đẳng thức sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^5\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^5\right) - 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4 b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^4\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^3\right) \geq 0. \tag{18}$$

3 "Cái gốc" thứ ba: Công thức nội suy Lagrange

Phần này tiếp tục đề cập đến “cái gốc” thứ ba của một số hằng đẳng thức dưới dạng phân thức: Công thức nội suy Lagrange.

Để đơn giản, ta chỉ xét với trường hợp $n = 3$, với lưu ý rằng những kết quả dưới đây có thể tổng quát với mọi $n \geq 2$.

Định lý 3.1. *Đa thức với bậc không quá 2 thì có tối đa là hai nghiệm phân biệt.*

Chứng minh. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in R)$. Đây là đa thức với bậc không quá 2. Nếu x là nghiệm của đa thức thì $P(x) = 0$, hay $ax^2 + bx + c = 0$. Vì phương trình này có tối đa là hai nghiệm phân biệt, nên ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3.2. *Cho 3 số x_1, x_2, x_3 phân biệt và 3 số a_1, a_2, a_3 tùy ý. Thế thì tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ với bậc không quá 2, thỏa mãn*

$$P(x_1) = a_1, P(x_2) = a_2, P(x_3) = a_3. \tag{19}$$

Đa thức đó có dạng

$$P(x) = a_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + a_2\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + a_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \tag{20}$$

Công thức (20) được gọi là Công thức nội suy Lagrange (trường hợp $n = 3$).

Chứng minh.

- Đa thức $P(x)$ tồn tại, với dạng (20) nêu trên.

- Rõ ràng đa thức này có bậc không quá 2.

- Dễ dàng kiểm tra được rằng $P(x_1) = a_1$, $P(x_2) = a_2$, $P(x_3) = a_3$.

- Đa thức $P(x)$ với dạng (20) nêu trên là duy nhất.

Thật vậy, giả sử tồn tại đa thức $Q(x)$, $Q(x) \neq P(x)$, với bậc không quá 2 và thỏa mãn $Q(x_1) = a_1$, $Q(x_2) = a_2$, $Q(x_3) = a_3$.

Đặt $f(x) = P(x) - Q(x)$. Thế thì, ta có

$$f(x_1) = P(x_1) - Q(x_1) = a_1 - a_1 = 0,$$

$$f(x_2) = P(x_2) - Q(x_2) = a_2 - a_2 = 0,$$

$$f(x_3) = P(x_3) - Q(x_3) = a_3 - a_3 = 0.$$

Vậy $f(x)$ là đa thức với bậc không quá 2, nhưng lại có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt, mâu thuẫn với Định lý 3.1. Ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý rằng, bởi (19) nên Công thức nội suy Lagrange còn được phát biểu dưới dạng như sau

Định lý 3.3. *Cho 3 số thực x_1, x_2, x_3 phân biệt. Thế thì mọi đa thức $P(x)$ với bậc không quá 2 đều có thể viết được dưới dạng*

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + P(x_2)\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} \\ + P(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Sau đây là một số phương pháp sáng tác bài tập, liên quan đến các hằng đẳng thức dạng phân thức.

3.1 Hướng sáng tác thứ nhất

Cho 3 số thực x_1, x_2, x_3 phân biệt. Xét đa thức (bậc không quá 2) như sau

$$P(x) = x^3 - (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Theo công thức (21), ta có

$$P(x) = P(x_1) \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+P(x_2).\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+P(x_3).\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} x^3-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)= \\ x_1^3\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+x_2^3\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+x_3^3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} (x_1+x_2+x_3)x^2-(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)x+x_1x_2x_3= \\ x_1^3\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+x_2^3\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+x_3^3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} (x_1+x_2+x_3).x^2-(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2).x+x_1x_2x_3= \\ \left(\frac{x_1^3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x^2 \\ -\left(\frac{x_1^3(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x \\ +\frac{x_1^3x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{array}$$

So sánh các hệ số tương ứng, ta được các hằng đẳng thức

$$\frac{x_1^3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=x_1+x_2+x_3;$$

$$\begin{array}{c} \frac{x_1^3(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ =x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2; \end{array} \quad (22)$$

$$\frac{x_1^3x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=x_1x_2x_3. \quad (23)$$

Từ các hằng đẳng thức trên, ta có thể sáng tác được nhiều bài tập phong phú.

Chẳng hạn từ (22), ta có bài toán sau

Bài toán 3.1. *Chứng minh rằng với 3 số nguyên bất kỳ x_1, x_2, x_3 khác nhau từng đôi một, số sau đây cũng là số nguyên*

$$\frac{x_1^3(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Ngoài ra, với 3 số không âm x_1, x_2, x_3 bất kỳ, ta đã biết bất đẳng thức sau

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

hay

$$x_1x_2x_3\leq\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3$.

Do đó, từ (23), ta có bài toán sau

Bài toán 3.2. *Chứng minh rằng với 3 số không âm bất kỳ x_1, x_2, x_3 khác nhau từng đôi một, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{x_1^3.x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^3.x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^3.x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}<\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3.$$

3.2 Hướng sáng tác thứ hai

Cho 3 số thực x_1, x_2, x_3 phân biệt. Xét đa thức (bậc không quá 2), như sau

$$P(x) = x^k, k \leq 2.$$

Theo Công thức nội suy Lagrange, ta có

$$P(x) = P(x_1).\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+P(x_2).\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+P(x_3).\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^k = x_1^k.\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+x_2^k.\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+x_3^k.\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^k = \left(\frac{x_1^k}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^k}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^k}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x^2$$

$$-\left(\frac{x_1^k.(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^k.(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^k.(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x$$

$$+\frac{x_1^k.x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^k.x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^k.x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

- Với $k = 2$

Ta có

$$x^2 = \left(\frac{x_1^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x^2$$

$$-\left(\frac{x_1^2.(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2.(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2.(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x$$

$$+\frac{x_1^2.x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2.x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2.x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

So sánh các hệ số tương ứng, ta được các hằng đẳng thức

$$\frac{x_1^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1;$$

$$\frac{x_1^2.(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2.(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2.(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0;$$

$$\frac{x_1^2.x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^2.x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3^2.x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0.$$

Ngoài ra, ta có thể chọn hướng khác để sáng tác bài tập một cách phong phú hơn. Chẳng hạn, với $k \le 2$, bởi (24), ta suy ra

$$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{x_1^k}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x-x_1)}$$
$$+\frac{x_2^k}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x-x_2)}+\frac{x_3^k}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x-x_3)}.$$

Hằng đẳng thức này có thể được xem như bài toán phân tích một phân thức thành tổng của các phân thức đơn giản.

Chẳng hạn, với $k=2$, $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, ta có bài toán sau

Bài toán 3.3. *Phân tích phân thức sau thành tổng của những phân thức đơn giản*

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

Rõ ràng, theo hướng giải tổng quát trên, hằng đẳng thức cần tìm là

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{12(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}+\frac{9}{4(x+3)}.$$

- Với $k=1$

Ta có

$$x=\left(\frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x^2$$

$$-\left(\frac{x_1.(x_2+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2.(x_3+x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3.(x_1+x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right).x$$

$$+\frac{x_1x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2x_3x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

So sánh các hệ số tương ứng, ta được các hằng đẳng thức

$$\frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=0;$$

$$\frac{x_1.\left(x_2+x_3\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_2.\left(x_3+x_1\right)}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_3.\left(x_1+x_2\right)}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}=1;$$
$$\frac{x_1x_2x_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_2x_3x_1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_3x_1x_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}=0.$$

- Với $k=0$

Ta có

$$1=\left(\frac{1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\right).x^2;$$
$$-\left(\frac{x_2+x_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_3+x_1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_1+x_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\right).x$$
$$+\frac{x_2x_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_3x_1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_1x_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}.$$

So sánh các hệ số tương ứng, ta được các hằng đẳng thức

$$\frac{1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}=0;$$
$$\frac{x_2+x_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_3+x_1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_1+x_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}=0;$$
$$\frac{x_2x_3}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{x_3x_1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\frac{x_1x_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}=1.$$

3.3 Hướng sáng tác thứ ba

Cho 4 số thực $x_1=a, x_2=b, x_3=c, x_4=X$ phân biệt. Xét đa thức bậc nhất như sau

$$P\left(x\right)=a+b+c-x.$$

Theo Công thức nội suy Lagrange, ta có

$$P\left(x\right)=P\left(x_1\right).\frac{\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)\left(x_1-x_4\right)}+P\left(x_2\right).\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_4\right)}$$
$$+P\left(x_3\right).\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)\left(x_3-x_4\right)}+P\left(x_4\right).\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)}{\left(x_4-x_1\right)\left(x_4-x_2\right)\left(x_4-x_3\right)}.$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a+b+c-x=$$
$$\left(b+c\right).\frac{\left(x-b\right)\left(x-c\right)\left(x-X\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(a-X\right)}+\left(c+a\right).\frac{\left(x-a\right)\left(x-c\right)\left(x-X\right)}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)\left(b-X\right)}$$
$$\left(a+b\right).\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-X\right)}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)\left(c-X\right)}+\left(a+b+c-X\right).\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right)}{\left(X-a\right)\left(X-b\right)\left(X-c\right)}.$$
$$\Leftrightarrow$$

$$0x^3+0x^2-x+a+b+c=$$
$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)(a-X)}+\dfrac{c+a}{(b-a)(b-c)(b-X)}+\\ \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)(c-X)}+\dfrac{a+b+c-X}{(X-a)(X-b)(X-c)}\end{array}\right).x^3+\ldots$$

So sánh hệ số tương ứng của x^3 ở hai vế, ta có

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)(a-X)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)(b-X)}+$$
$$\frac{a+b}{(c-a)(c-b)(c-X)}+\frac{a+b+c-X}{(X-a)(X-b)(X-c)}=0$$

hay

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)(a-X)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)(b-X)}+$$
$$\frac{a+b}{(c-a)(c-b)(c-X)}=\frac{X-(a+b+c)}{(X-a)(X-b)(X-c)}.$$

Từ đó, ta có bài toán sau

Bài toán 3.4. *Chứng minh hằng đẳng thức sau*

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)(a-X)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)(b-X)}+$$
$$\frac{a+b}{(c-a)(c-b)(c-X)}=\frac{X-(a+b+c)}{(X-a)(X-b)(X-c)}.$$

Từ các hằng đẳng thức dạng phân thức trên, ta có thể sáng tác khá nhiều bài tập phong phú.

Tháng 9 / 2011

T.Đ.C

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2006.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Trịnh Đào Chiến, Trần Nam Dũng, *Chuyên đề chọn lọc về đa thức và ứng dụng*, NXB Giáo dục, 2008.